Supporting Information for *Univ. Chem.* doi: 10.3866/PKU.DXHX201804037

火锅中的科学：利用非稳态传热模型确定食物加热时间

李晓宇，刘珂，张树永*
山东大学化学与化工学院，济南 250100

Science in Hot Pot: Determining the Heat-up Duration Using Model of Unsteady Heat Transfer

LI Xiaoyu, LIU Ke, ZHANG Shuyong *
School of Chemistry and Chemical Engineering, Shandong University, Jinan 250100, P. R. China.

*通讯作者，Email: syzhang@sdu.edu.cn

5 附录

热传导方程的求解过程：

$$\frac{\partial T^*}{\partial F_o}=\frac{\partial^2 T^*}{\partial L^{*2}} \tag{s1}$$

(s1)式为线性齐次偏微分方程，可采用分离变量法求解。为此，将两个自变量的函数 $T^*(L^*, F_o)$表示为两个单变量函数 $X(L^*)$和 $Y(F_o)$的乘积，即

$$T^*\left(L^*,F_O\right)=X\left(L^*\right)Y\left(F_o\right) \tag{s2}$$

式中的 $X(L^*)$仅为 L^*的函数，与 F_o 无关；而 $Y(F_o)$仅为 F_o 的函数，与 L^*无关。于是可写出如下两个方程，即

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial L^{*2}}=Y\frac{\partial^2 X}{\partial L^{*2}}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial F_o}=X\frac{\partial Y}{\partial F_o}$$

将以上二式带入式(s1)，得

$$X\frac{\partial Y}{\partial F_o}=Y\frac{\partial^2 X}{\partial L^{*2}}$$

上式分离变量，得

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial F_o}=\frac{1}{X}Y\frac{\partial^2 X}{\partial L^{*2}} \tag{s3}$$

式(s3)中等号左侧仅与 F_o 有关，右侧仅与 L^*有关，故上式的左右两侧只有同时等于某一个常数时该式才能成立，即

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial F_o}=\frac{1}{X}Y\frac{\partial^2 X}{\partial L^{*2}}=\text{常数} \tag{s4}$$

由数学分析可知，只有当上式中的常数项小于零时，该式才可能有满足定解条件的非零解，故将该式的常数值设为$-\lambda_2$，于是式(s4)可以改写成如下两个常微分方程，即

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}L^{*2}}+\lambda^2 X=0 \tag{s5}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}F_o}+\lambda^2 Y=0 \tag{s6}$$

分别对上两式求解，可得

$$\mathrm{X}=C_1\sin\lambda L^*+C_2\cos\lambda L^* \tag{s7}$$

$$Y=C_3\exp(-\lambda^2 F_o) \tag{s8}$$

将式(s7)、式(s8)带入式(s2)，即可求得 $T^*(L^*, F_o)$的解为

$$T^* = \left(A\sin\lambda L^* + B\cos\lambda L^*\right)\exp(-\lambda^2 F_o) \tag{s9}$$

式中 A = C_1C_3，B = C_2C_3，λ 为特征值。A，B 为积分常数，他们可以利用定解条件(s1)、(s2)、(s3)确定。

首先应用边界条件(s3) $L^* = 0, \dfrac{\partial T^*}{\partial L^*} = 0$，为了利用此条件，可将式(9)对 L_*求导

$$\frac{\partial T^*}{\partial L^*} = \left(A\lambda\cos\lambda L^* - B\lambda\sin L^*\right)\exp(-\lambda^2 F_o) \tag{s10}$$

将边界条件(s3)带入式(s10)，得

$$0 = A\lambda\exp(-\lambda^2 F_o)$$

由于$\lambda \neq 0$，故

$$A = 0 \tag{s11}$$

于是式(s9)变为

$$T^* = B\cos\lambda L^* \exp(-\lambda^2 F_o) \tag{s12}$$

再将边界条件(s2)L^*=1, T^* = 0 代入式(s12)得

$$0 = B\exp(-\lambda^2 F_o)\cos\lambda \tag{s13}$$

为了使式(s1)有非零的特解，式(s9)中的常数 A 和常数 B 不能同时为零。由于已经有 A = 0，故 B≠0，则由式(s13)可得

$$\cos\lambda = 0 \tag{s14}$$

由式(s14)可知特征值λ可以有无限多个，

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2},\ \lambda_2 = \frac{3\pi}{2},\mathrm{K},\ \lambda_i = \frac{2i-1}{2}\pi\left(i=1,2,\mathrm{K}\ n\right) \tag{s15}$$

将式(s15)中的λ_i值代入式(s12)，得

$$T_i^* = B_i\cos\left(\lambda_i L^*\right)\exp(-\lambda_i^2 F_o) \tag{s16}$$

式(s16)为式(1)的一个特解。由于式(s1)的线性齐次性，其通解应为所有特解的线性组合，即

$$T_i^* = \sum_{i=1}^{\infty} B_i\cos\left(\frac{2i-1}{2}\pi L^*\right)\exp\left[-\left(\frac{2i-1}{2}\pi\right)^2 F_o\right] \tag{s17}$$

最后将初始条件(s1)F_0 = 0，T* = 1 带入上式，即可求出常数 Bi，即

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} B_i\cos\left(\frac{2i-1}{2}\pi L^*\right) \tag{s18}$$

上式为一傅里叶级数，B_i为傅氏系数，由正交性原理可得

$$B_i = \frac{2}{1}\int_0^1 (1)\cos\left(\frac{2i-1}{2}\pi L^*\right)\mathrm{d}L^*$$

将上式积分，得

$$B_i = 2\left[\frac{2}{(2i-1)\pi}\right]\left[\sin\left(\frac{2i-1}{2}\pi L^*\right)\right]_0^1$$

解得

$$B_i = -\frac{4\times(-1)^i}{(2i-1)\pi} \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{s19}$$

或

$$B_1=\frac{4}{\pi}，B_2=\frac{-4}{3\pi}，B_3=\frac{4}{5\pi},\ldots \tag{s19a}$$

将B_i的表达式带入式(s17)　，最后可得T^*的表达式为

$$T^*=\frac{4}{\pi}\left[\begin{array}{l}\exp(-(\pi/2)^2F_o)\cos\left(\frac{\pi}{2}L^*\right)-\frac{1}{3}\exp(-(3\pi/2)^2F_o)\cos\left(\frac{3\pi}{2}L^*\right)\\+\frac{1}{5}\exp(-(5\pi/2)^2F_o)\cos\left(\frac{5\pi}{2}L^*\right)-\ldots\end{array}\right] \tag{s20}$$