•自学之友• doi: 10.3866/PKU.DXHX201803044 www.dxhx.pku.edu.cn

毛细管口气泡的曲率半径和附加压力变化

谢治辉*

西华师范大学化学化工学院，四川 南充 637002

摘要：通过直接绘制气泡形成过程中弯曲表面关键状态的形状示意图，得到了曲率半径随时间变化的关系曲线。利用该曲线有助于加深学生对最大泡压法测表面张力实验中曲率半径和附加压力变化的理解，同时该曲线也可用于解析一些与附加压力有关的习题。

关键词：毛细管；曲率半径；附加压力；表面张力

中图分类号：G64；O64

Evolution of Radius of Curvature and Excess Pressure of a Bubble at the End of Capillary

XIE Zhihui *

College of Chemistry and Chemical Engineering, China West Normal University, Nanchong 637002, Sichuan Province, P. R. China.

Abstract: The profiles of the curved surface at critical status during formation of a bubble are drawn schematically, and the dependence of the radius of curvature on time is obtained in this work. The curve is useful for the students to better understand the evolution of radius of curvature and excess pressure in the laboratory experiment of surface tension measurements by the bubble pressure method, and helpful to interpret the exercises regarding excess pressure.

Key Words: Capillary; Radius of curvature; Excess pressure; Surface tension

表面张力是本科物理化学课程表面物理化学一章中的一个非常重要的概念[1,2]。由于表面张力的作用，弯曲表面下的液体与平面不同，前者将受到一种附加的压力，即附加压力。附加压力与曲率半径的关系是物理化学课程明确要求熟悉掌握的知识点[3,4]。然而，学生在应用附加压力相关知识的时候，常疑问重重，或面对问题无从下手。

例如，最大(气)泡压(力)法测定溶液的表面张力是物理化学实验中的典型实验[5]。该实验需要在气泡曲率半径刚好等于毛细管半径的时候读数。因为此时气泡的曲率半径最小，附加压力值最大[6]。实际上，从毛细管内液柱下降到形成气泡，进而气泡破裂或从管口脱离的过程中，曲率半径经历了先增加后降低，再增加的过程。多数实验教材虽然讲到了曲率半径经历了后半部分的降低和增加的过程，部分参考书还给出了示意图，但是并不完善[7−9]。目前还没有参考书目或文献详述液柱从下降至形成气泡进而脱离毛细管口的整个过程中弯曲面的曲率半径及对应的附加压力的变化。多数学生实验过程中虽然记住了需要在压力差值最大时读数，但并不知道真正的原因；或者即使知道此时曲

收稿：2018-03-21；录用：2018-05-09；网络发表：2018-05-31

*通讯作者，Email: zhxie@cwnu.edu.cn

率半径对应最小值也即等于毛细管半径，但对于曲率半径经历的变化则无从谈起。另一个例子便是在倒 U 型毛细管的两侧端口处各有一大一小的肥皂泡，问若 U 型管内接通后，两肥皂泡大小有何变化？有部分学生即使看了答案后仍然感到疑惑。

为了使上述问题简单清楚，本文将以示意图的形式给出毛细管内液柱从下降至气泡从毛细管口脱离的整个过程中弯曲面的形状和对应曲率半径的变化规律，并结合 Young-Laplace 公式讨论附加压力值的变化。相信根据示意图，学生可以更为轻松地理解和解答上述例子中的有关表面张力和附加压力的问题。

1 曲率半径 *R* 随时间 *t* 变化曲线的建立

图 1 所示为在毛细管上端持续缓慢施加外压，从而在毛细管端口形成气泡的过程中弯曲面的变化示意图。图中横线 *MN* 为空气与液体的界面。为了便于理解，图中以虚线的形式给出不同时间点弯曲面所对应的球体的完整截面。设毛细管可被液体润湿，毛细管端口刚好与液面相切。由于毛细管效应，液体在毛细管内上升至某高度并形成弯月凹面。设此时弯月面呈半球状，则弯曲面的曲率半径 *R* 就等于毛细管半径 *r* (图 1 t_0)。平衡后，在毛细管的上端施加外压使液柱下降，在弯曲面最下侧刚好与液面相切前，弯曲面形状维持不变，曲率半径也不改变，见图 1 t_1。随后，弯曲凹面将变形，曲率半径增加(图 1 t_2)，并进而被压缩为平面(图 1 t_3)，此时曲率半径增至无限大。随后，端口液面继续向下压出，形成具有较大曲率半径的凸面(图 1 t_4)，但相对于 t_3 时刻，此时的曲率半径已经明显下降。进一步，当凸出部分刚好形成一个半球时，曲率半径 *R* 减小到再次与毛细管半径 *r* 相等(图 1 t_5)。最后，曲率半径将再次逐渐增加直至最大值(图 1 t_6)；此后，气泡立即发生破裂或从毛细管口脱离逸出。

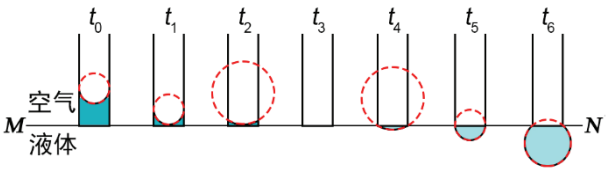

图 1 气泡形成过程中弯曲面形状变化示意图

将图 1 各时间点对应弯曲面的曲率半径 *R* 对时间 *t* 作图可得图 2。由图 2 并结合图 1 可知，在 t_0 到 t_1 期间，毛细管内液柱下降并不引起弯曲面曲率半径的改变，期间弯曲面的曲率半径 *R* 始终等于毛细管半径 *r*，随后曲率半径逐渐增加至无穷大，即形成平面(t_3)。随着时间增加，曲率半径再次下降至最低值并等于毛细管半径(t_5)，然后曲率半径再次随气泡增大而增加至最大值(t_6)，越过此点，气泡发生破裂或逸出。因而，实际上，曲率半径 *R* 经历了由不变到逐渐增加至无穷大，然后再降至最低值，最后再升至极大值的变化过程。

2 曲率半径 *R* 随时间 *t* 变化曲线的应用

2.1 实例 1：最大泡压法测表面张力中的应用

根据图 2 可知，当曲率半径最小时，对应的曲率半径值即为毛细管的半径。根据 Young-Laplace 公式，当曲率半径最小时，附加压力最大。因此，若使用已知表面张力的液体并测得其最大附加压力值，即可得到毛细管的半径。然后，在相同的条件下，测量未知液体的最大附加压力值，并将上述得到的毛细管半径代入 Young-Laplace 公式，即可计算得到未知液体的表面张力。

2.2 实例 2：对倒 U 型毛细管口肥皂泡大小变化的解析

问题：在一个倒 U 型毛细管两端各有一大一小肥皂泡，中间有一旋塞。拧开旋塞使两气泡相通，问两泡的大小将发生如何变化？到何时达到平衡？

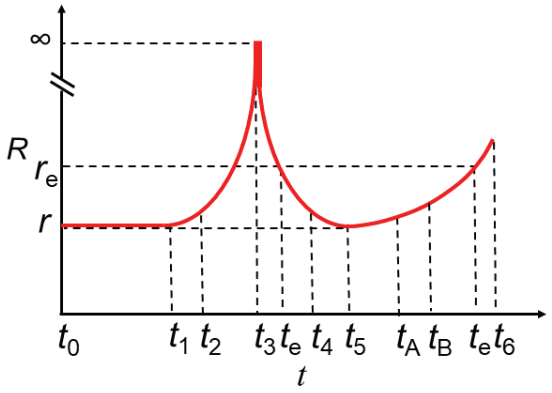

图 2　曲率半径 *R* 随时间 *t* 的变化

答案：接通后小泡变小、大泡变大，即小气泡的附加压力 p_s 大于大气泡的附加压力，当达平衡时两气泡的曲率半径相等[10]。

该问题和答案选自参考文献[10]。针对此题，多数学生在思考或看了参考答案后都能明白平衡时两气泡的曲率半径应该相等。因为根据 Young-Laplace 公式，加之外压相同，则要使大小泡的附加压力相同，曲率半径必相等。但很多学生的疑问是：既然小泡越来越小，大泡越来越大，也即小泡的曲率半径和大泡的曲率半径分别逐渐减小和逐渐增大，则对应小泡的附加压力越来越大，大泡的附加压力越来越小。那大泡和小泡的曲率半径和附加压力又是如何能够相等的呢？

若能结合图 1 和图 2，则能形象而准确地解答上述疑问。设外压为 p_0，小泡的附加压力为 p_A，小泡曲率半径为 R_A，小泡内部压力为 $p_{A,in}$，大泡的附加压力为 p_B，大泡曲率半径为 R_B，大泡内部压力为 $p_{B,in}$。由于肥皂泡有里外 2 层，则附加压力 $p_s = 2 \times 2\gamma/R = 4\gamma/R$，式中 γ 为表面张力。因而，$p_{A,in} = p_0 + 4\gamma/R_A$，$p_{B,in} = p_0 + 4\gamma/R_B$。由于 $R_A < R_B$，则开始时 $p_{A,in} > p_{B,in}$，即开始时小泡内部的压力大于大泡内部的压力，因而气体将由小泡一侧流向大泡一侧，导致小泡变小、大泡变大。设开始时小泡位于图 2 中的 t_A，大泡位于 t_B，则在大泡变大的过程中对应曲率半径 R_B 将沿 t_B 右侧曲线移动，而小泡在变小的过程中曲率半径将沿 t_A 左侧曲线移动(相当于图 1 中的弯曲面形状由右侧向左侧变化)。相应地，大泡的附加压力因曲率半径增加而减小，小泡的附加压力因曲率半径减小而增大，因而大泡内部压力将减小，小泡内部压力将增加。当移至 t_5 处时，小泡的曲率半径降至最低值，具有最大的附加压力。此时左右气泡内部出现最大压力差，小泡一侧气体进一步压缩至大泡一侧，导致大泡进一步变大，小泡进一步变小。但是，一定注意，此时虽然大泡一侧的曲率半径仍在进一步增加，但小泡一侧的曲率半径不是继续降低而是按照图 2 中 t_5 至 t_3 的方向沿曲线由小至大迅速增加，直到大小泡的曲率半径相等，均为 r_e，见图 2 左侧 t_e。图 2 中右侧 t_e 代表平衡时大泡的位置。此时，大小泡的附加压力相等，内部压力也相等。可见，在达到平衡前的整个过程中，虽然大泡一直在增加，小泡一直在减少，但小泡的曲率半径经历了先减小后增加的过程。

3　结语

通过对毛细管口气泡形成过程中的临界状态绘制示意图，并获得曲率半径随时间的变化关系曲线，可以清楚形象地反映气泡形成过程中弯曲表面所经历的形状以及曲率半径的变化。结合Young-Laplace公式可以很直观地得到气泡形成过程中对应附加压力的变化规律，并能针对一些实际问题做出准确详细的解析。笔者在教学实践中发现，通过本文所述的方法，学生能够轻松理解最大泡压法测定表面张力实验中有关附加压力的变化规律，也能够比较详细准确回答本文实例2所述习题。

参 考 文 献

[1] 尹振兴, 孔辉, 王海川, 章俊, 廖直友, 李媛. 大学化学, **2016,** *31* (9), 77.

[2] 刘引烽, 房嫄, 赵凯凯, 李琛骏, 杨小瑞, 周海堤, 王宇翔, 朱逸莉, 徐华根. 大学化学, **2014,** *29* (5), 84.

[3] 傅献彩, 沈文霞, 姚天扬, 侯文华. 物理化学. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[4] 天津大学物理化学教研室. 物理化学. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2009.

[5] 甘泉, 杜源, 雷航, 阎晓琦. 大学化学, **2016,** *31* (11), 97.

[6] 杨武, 何荣幸, 廖钫, 刘瑞泉. 理化测试(II). 北京: 科学出版社, 2004.

[7] 复旦大学等. 物理化学实验. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[8] 李曦, 胡善洲. 物理化学实验. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2010.

[9] 唐林, 刘红天, 温会玲. 物理化学实验. 第2版. 北京: 化学工业出版社, 2016.

[10] 傅献彩, 沈文霞, 姚天扬, 侯文华. 物理化学学习指导. 北京: 高等教育出版社, 2007.